〔論　文〕

システムと対称性

江戸川大学 メディアコミュニケーション学部 情報文化学科　　石 田 義 明

0.　はじめに

万華鏡を覗くと対称的な図形が次から次へと現れてきて、神秘的な世界を味わうことができる。これは周辺に張られた鏡による鏡映対称性によるものである。プレゼント用の包装紙には同じ模様が縦横に繰り返し印刷されていることがある。これは並進対称性により綺麗にみえるのである。ひまわりとかバラのような花をわれわれはきれいに感じるのは、回転対称性によるのである。我々は古代から、対称性というものに強い美を感じてきた。対称性は主に幾何学模様上に見いだされてきた。古代の人はその対称性に神のような神秘性を感じていた。しかしながら美や神秘性以上のものは見いだせなかった。対称性の真の重要性は 19 世紀のガロアの理論を待たねばならなかった。ガロアは代数方程式の解の対称性に初めて群論という概念を導入して解の存在を論じた。

問題を解くということはどういうことであろうか。まずシステムを分析・分解して構造を明らかにしていくのであるが、システムが複雑であると途中で挫折してしまうのがしばしばである。そこでシステムを完全に明らかにするのではなく、外側から見た対称性だけでなにがわかるのであろうかという考えが導入され、それだけでもシステムに関するかなり重要な情報が得られることがわかり、対称性を分析・解析するということが重要な分野になっている。対称性としては結晶構造などでは、鏡映対称性、回転対称性、反転対称性、並進対称性などがあり、ニュートン力学では 3 次元空間のガリレイ変換対称性、特殊相対論では時空連続体上のローレンツ変換対称性、量子力学では抽象的なゲージ場のゲージ対称性があり、群論を使うことによって系の内部構造に深い洞察を与えることができる。

1. n 次方程式の解の対称性 (1)

例えば方程式を解く。紀元前 2000 年以上前の古代バビロン文化時代から 1 次方程式や 2 次方程式は知られており、楔文字を使用して解かれていた。エジプト文化の数学（リンドパピルス）やバビロン文化の数学はギリシャ数学へと引き継がれる。ギリシャのアレキサンドリアは数学の中心となり、ターレス、ピタゴラスやユークリッドらにより更なる発展があった。ギリシャ数学の特徴は、バビロン数学などが商業に使われるなどの実用性から発生したものであるが､ギリシャでは哲学的、学問的な側面が強くなっている。ユークリッドの「幾何学原論」などは公理論的な体系付けができており、その第五公準はその後、多数の数学者を悩ましたが､ユークリッドの正しさが証明された。しかしながらガウス、ロバチェフスキー、リーマンなどにより、第五公準と異なる公準で矛盾なく幾何学が構成出来ることがわかり、いわゆる非ユークリッド幾何学が 19 世紀の近代西洋数学によって完成された。それはアインシュタインの一般相対性理論で実験にかかるようになるのである。ギリシャ数学で重要な役割をするのがアルキメデスであり、円周率の近似値を求めたり、円の面積公式を導いたりした。円を多角形の極限としてとらえ、現在の微積分に通じる出発点といえる重要な寄与をしている。ギリシャ数学はイスラムに伝わり、代数学の祖と言われるフワーリズミーの著書で、１次と２次の方程式の標準的な解法が確立された。2 次方程式の解の公式も示されている。特に重要なことは、未知数を使った計算方法を初めて示したということである。数学史上では、そ

の著書のタイトルの一部から代数（algebra）という言葉が使われ始めたといわれている。同時代のオマルは、ギリシャ数学でアルキメデスらが発達させた円錐曲線を幾何学的に使って、広い範囲の 3 次方程式の解法を見つけている。それ以降、3 次方程式はいろいろな数学者に挑戦されてきた。それはルネッサンスを迎えた近代西洋数学において始まった。3 次方程式の代数解（べき級数で解を表す）は 16 世紀のイタリアでフェロ（Ferro）が発見する。その後タルタリア（Tartaglia）が独立に導いた。カルダノがそれらの結果をまとめて著書で紹介したため、現在「カルダノの公式」と呼ばれているがカルダノが式の発見者ではない。

4 次方程式の代数解はカルダノの弟子であるフェラーリによって導かれた。

1.1　2 次方程式

解の対称性を使って代数解を求めてみる。[2]

2 次方程式：$X^2 + aX + b = 0$　　(1―1)、この 2 つの解を α、β とすると、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -a \qquad (1-2),$$

$$\alpha \cdot \beta = b$$

解の交換に対して反対称な（α－β）は対称な（α＋β）と α・β を使って

$$\alpha - \beta = \pm\sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\cdot\beta}$$

$$= \pm\sqrt{a^2 - 4b} \qquad (1-3),$$

（1―1）の 2 次方程式が（1―2）と（1―3）の 2 連の 1 次方程式に変形され解が導かれる。

$$\frac{(-b \pm \sqrt{(a^2 - 4b)})}{2}$$

1.2　3 次方程式

3 次方程式を次のように表し

$$X^3 + aX^2 + bX + C = 0 \qquad (1-4),$$

3 つの解を α、β、γ とすると、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta + \gamma = -a \qquad (1-5),$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b$$

$$\alpha\beta\gamma = -c$$

（α、β、γ）の置換は 6 通りある。そのうち巡回的な 3 つは

（α、β、γ）（β、γ、α）（γ、α、β）、

非巡回的な 3 つは

（α、γ、β）（β、α、γ）（γ、β、α）。

ここで、天下り的に下記の p、q を定義する。

$$p \equiv \alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2$$

$$q \equiv \alpha + \beta\omega^2 + \gamma\omega$$

但し $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 。

解と係数の関係を使うと $p^3 + q^3$ と $p^3 \cdot q^3$ は係数 a、b、c で表せる。

$$p^3 + q^3 = A(a,b,c) \quad ,$$

$$q^3 \cdot q^3 = B(a,b,c) \qquad (1-6)$$

これより、p^3、q^3 は 2 次方程式の解になっている。それゆえ

$$p, q = \sqrt[3]{\frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4B}}{2}} \qquad (1-7)$$

これと（1―5）より α、β、γ が求まる。2 次方程式は(1-2)と(1-3)より 1 次方程式に変換することにより解を求めることができ、3 次方程式は(1-7)より 2 次方程式に変換できた。同様に 4 次方程式も 3 次方程式に帰着できることが分かっている。フェラーリ以降の数学者は、5 次方程式を低次の方程式に帰着する方法に挑戦したが、むしろ 5 次以上の高次方程式が出現してしまった。多数の研究者が挫折を繰り返し、解決には約 300 年の時が必要であったほど難しい課題であった。

2.　ガロア群 [3]

5 次方程式の代数解が存在しないと主張したのはルッフィーニが最初であった。証明できたと主張したが結局認められなかった。しかし解が存在しないという主張は極めて斬新で、その後に大きな影響をもたらした。最初に代数解がないことを証明したのはアーベルであった。その後のガロアによる証明は代数学にパラダイムシフトを起こすものであり、現代数学や現代物理学になくてはな

らないものになった。そこではいわゆる群論という新しい概念を使って、解の対称性を通して代数解の存在を論じた。前述したように、3 次方程式の場合 3 個の解の組（α、β、γ）は置換（ 順番の並び替え）により 6 通りの組が存在する。つまり 6 通りの置換が存在し、群をなす。6 通りの置換を次のように定義すると、

巡回置換

$$\sigma_0=\begin{pmatrix}\alpha\ \beta\ \gamma\\ \alpha\ \beta\ \gamma\end{pmatrix}\ \sigma_1=\begin{pmatrix}\alpha\ \beta\ \gamma\\ \beta\ \gamma\ \alpha\end{pmatrix}\ \sigma_2=\begin{pmatrix}\alpha\ \beta\ \gamma\\ \gamma\ \alpha\ \beta\end{pmatrix}$$

非巡回置換

$$\sigma_3=\begin{pmatrix}\alpha\ \beta\ \gamma\\ \alpha\ \gamma\ \beta\end{pmatrix}\ \sigma_4=\begin{pmatrix}\alpha\ \beta\ \gamma\\ \beta\ \alpha\ \gamma\end{pmatrix}\ \sigma_5=\begin{pmatrix}\alpha\ \beta\ \gamma\\ \gamma\ \beta\ \alpha\end{pmatrix}$$

これらを使って、6 個の部分群が存在する。

$$G_6=\{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5\}$$
$$G_3=\{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2\}$$
$$G_1=\{\sigma_0\}$$
$$G_2=\{\sigma_0,\sigma_3\},\{\sigma_0,\sigma_4\},\{\sigma_0,\sigma_5\}$$

6 の素因数分解は 2×3 であるから 2 乗根（平方根）か 3 乗根（立方根）の解を考えればよい。立法根から出発すると、G_2 は正規部分群にならない。平方根から出発すると G_3 は正規部分群になり、3 つの立方根から成る代数解を持つ。式(1－6）は正にガロア群の手順をそのまま表している。4 次方程式の解の置換は 4！＝24 通りあり、2×2×2×3 の部分群に分解すると、すべてが正規部分群になり、代数解が求まる。では 5 次式の場合はどうなるのであろうか。この場合 5！＝120 通りの置換が存在し、素因数分解は 120＝2×3×5××2×2 となる。5 乗根からなるとすると 24 個からなる部分群の中に正規部分群が存在しないことがわかる。平方根から成るとすると、残りの 60 個からなる部分群は交代群になることがわかる。

この交代群が 2 か 3 か 5 の正規部分群をもてば代数解を持つ可能性があるが、ガロアは 60 個からなる交代群は正規部分群を全く持たないことを証明し、5 次方程式が代数解を持たないことを証明した。ガロアはこの証明の段階で群論を開発しガロア群を作って証明をした。ここでは実際に解を求めることはせず、解の対称性から証明してしまったことは、この後に大きな影響をもたらすことになる。対称性のみから、いろいろな興味ある結果がえられることを述べたい。

3. 変分原理と対称性：ネーターの定理(4)

対称性からいろいろな物理法則が導けることを示したい。有名な定理に「ネーターの定理」というのがある。それは

「系が対称性を持つと保存量が存在する。」

系の運動を記述するラグランジアン $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$、作用積分 S とすると

$$S[L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})]=\int_{t_1}^{t_2}L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})dt$$

ハミルトンの原理

$$\delta S=0$$

を使うと

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)\right]\delta\mathbf{q}dt=0$$

これよりラグランジュ方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)=0 \quad (3-1)$$

が導かれる。

3.1 並進対称性がある場合

$$\delta L=L(q+\delta\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}+\delta\dot{\mathbf{q}})-L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$$
$$=\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\delta\mathbf{q}+\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\delta\dot{\mathbf{q}} \quad (3-2)$$

並進対称性より $\delta L=0$

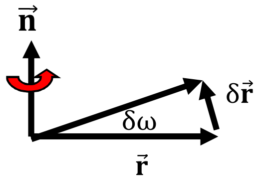
(3－1) より $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)=0$

一般運動量 $p\equiv\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ とすると

p＝const. ：運動量保存則

3.2 回転対称性がある場合

回転軸 $\vec{n}$ の廻りに無限小回転 $\delta\omega$ させると



$$\delta\mathbf{r} = \delta\omega(\vec{\mathbf{n}}\times\mathbf{r})$$

$$\delta L = L\left(\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}+\delta\dot{\mathbf{r}}\right) - L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}\delta r + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\delta\dot{\mathbf{r}}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\right)\delta r + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\delta\dot{\mathbf{r}}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\delta\mathbf{r}\right) = \delta\omega\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})$$

$\mathbf{r}\times\mathbf{p} = \text{const.}$　：角運動量保存則

3.3　時間軸対称性がある場合

無限小時間変換（$t \Rightarrow t+\delta t$）させると

$\delta\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}}\delta t$ 、$\delta\dot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{q}}\delta t$

$$\delta\omega = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\delta\mathbf{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{\mathbf{q}}$$

$$= \delta t\cdot\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\ddot{\mathbf{q}}\right)$$

$$= \delta t\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\dot{\mathbf{q}}\right)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - L) = 0$$

ハミルトニアン $H \equiv p\dot{q} - L$ を導入すると

$H = E$　エネルギー保存則

光学、電磁気学、流体力学、相対論、量子力学など物理学は変分原理で描けることが分かっている。電磁気学だと、静電ポテンシャル ϕ とベクタポテンシャル A をラグランジアン L に導入すると Maxwell 方程式が導ける。電磁ポテンシャルに対するゲージ対称性から、ネーターの定理より荷電保存則が導ける。光学の場合、変分原理はフェルマの原理に対応する。このように物理学を変分原理で構成するとラグランジアン L に対称性を陽に取り入れることができ、群論を使うことによって簡単な表現を実現できる。

4.　物理学における対称性と群論

4.1 結晶構造：空間群（結晶点群＋並進操作）

分子の対称性は点群からなる。点群は 6 個の対称操作（恒等、回転、鏡映、反転、回映、回反）なる群である。結晶は分子と異なり、分子が繰り返し存在するような構造であるから、並進対称性が含まれる。そのような群は結晶点群と呼ばれる。結晶点群に並進操作可を加えたものを空間群と呼ばれ、結晶構造は空間群で表現される。

たとえばある結晶のエネルギーを求めようとすると、固有方程式を解くことになる。

$$\det\|\mathbf{H}-\mathbf{E}\| = \mathbf{0}$$

このとき結晶の対称群を考え、規約表現で固有方程式を作ると、規約表現ごとに固有方程式が分離し簡単に解くことができる。

$$\begin{bmatrix} [\text{規約表現}] & 0 \\ 0 & [\text{規約表現}] \end{bmatrix}$$

波動関数は規約表現の固有関数で展開すると少ない数の関数で展開できる。対称性が高いほど多数の規約表現が存在し、表現が簡単になる。結晶ならば並進対称性があるが、分子の場合なら不動点のある点群の規約表現を考えればよい。

4.2　素粒子論：ゲージ対称性（不変性）

ガロアは代数方程式の解の対称性に群論を用いて、5 次方程式の代数解の非存在を証明したが、それは有限群であった。ニュートン以来、多くの場合、物理現象は微分方程式で表現されている。リーはが微分方程式でも連続群の対称群が存在しないか考察し、リー群を考えだした。その後キリングとカルタンによって単純リー群の全ての対称性をリストアップし整理され、素粒子の統一理論で重要な役割を演じることになる。それは最先端の超ひも理論でも使われている。素粒子論での変換はゲージ変換であり、任意の点において局所ゲージ対称性を要求する。電磁場では大域的なゲージ対称性になるが、素粒子ではある点の近傍でのみ成り立つとするのである。素粒子に働く力として、電磁気力、強い力(原子核を結合する力)、弱

い力(放射性崩壊を起こす力)、重力がある。電磁気力の量子化は朝永、シュウィンガーによって、量子電磁気学として確立され、電磁場はゲージ対称性を持っているが、波動関数に対してもゲージ対称性を待たせると、それはU(1)のゲージ対称性をもつようになる。次のステップとして電磁気力と弱い力の統一があった。ゲージ対称性を持つ粒子の相互作用はゲージ粒子の交換よりなされる。弱い力ではウイークボソンがその役割をする。ところが、局所ゲージ対称性はウイークボソンの質量が0であることを要求する。しかし実際は質量をもつ。これが統一理論の完成をはばんだ。そこでサラム、ワインバーグはヒッグス機構を使い、「ゲージ変換における自発対称性の破れ」というメカニズムでこの困難を取り除き、電磁力と弱い力を統一した電弱理論を完成させた。それはエネルギーの高い領域では光子とウィークボソンは同じであるが、エネルギーの低い領域では「自発対称性の破れ」から1000倍の違いがある電磁力と弱い力になるということである。弱い力は単純リー群の SU(2)ゲージ対称性で表現できる。これにより電子はニュートリノに変換できる。更に強い力も取り込んで3つの力を統合した標準理論が構築された。強い力のゲージ対称性はSU(3)になり、3つを統合するとSU(3)×SU(2)×U(1)になるが、それをより統合して更に対称の高い SU(5)のゲージ対称性を持たせた。重力を除くとビッグバンもこれで説明ができるようになった。ビッグバンの開始時の高エネルギー状態では、SU(5)対称性があり、ゲージ対称性より3つの力は質量0のゲージ粒子に統一され、エネルギーが下がるとまず第1回目の自発対称性の破れが生じ、強い力が分岐する。電磁力と弱い力はまだ分岐しない。つまり SU(3)と SU(2)×U(1)に分岐する。更にエネルギーが下がると2回目の真空の相転移が起こり、電磁力とウィークボソンに分岐する。こうして3つの力はゲージ対称性と自発対称性の破れから統一されるに至った。陽子や中性子などのハドロンや電子などのレプトンとゲージ粒子である光子、ウィークボソンではスピンの統計が異なる。前者はフェルミオンであり後者のゲージ粒子はボソンである。これらを統一する超対称性理論が構築され、フェルミオンからボソンに変換できるようになった。しかしながら、重力はまだ統一されていない。

重力はグラビトンというゲージ粒子と考えられるが、ゲージ理論に取り込もうとすると、大きな問題が生じて、統一ができない。電磁力、弱い力、強い力は共にくりこみが可能であり、発散の困難を避けることができた。ところが重力場はくりこみができないということである。標準理論のように、ゲージ対称性で重力を含めた4つの力を統一しようとすると、発散の問題が生じてしまうのである。そこで、まったく別アプローチが色々提案されている。その中で注目されているのが超ひも理論である。くりこみできない困難を避けるため、ひもとして大きさを与えたのである。標準理論が特殊相対論と量子力学を取り込んだ質点のゲージ理論であったが、ひも理論は一般相対論と量子力学に大きさを与えた理論であり、古典近似では重力の理論になるようにできている。超ひも理論でも例外型リー群 E_8, G_2 対称性が取り込まれている。ここでも対称性が重要な役割をなすのである。ただ最終理論としてはまだまだ入り口に過ぎない。

5. まとめ

数学と物理の関係はどうなっているのであろうか。物理現象を解析するために、微分方程式を作ってその解を求めるといった場合、数学は現象を分析するための手段であり、数学は物理に従属する感があるが､」その逆の場合もしばしばある。また抽象数学では研究者も自然科学に使われるかどうかという価値観で研究しているわけではない。それにもかかわらず、最先端物理学では従来全く関係ないと思われた抽象数学が取り込まれ、新しい物理概念が次々に創造されていくのが現状である。例えば、キリングやカルタンによって整理された単純リー群の分類が、素粒子論の標準理論で重要な役割を演じたが、さらに重力を統一しよう

としている超ひも理論では、元来その幾何学的意味も分からず、その存在理由もはっきりしなかった例外型リー群の対称性が大きな役割を演じることになる。このようなことは昔からあることで、たとえば複素数の導入など初期には全く自然科学とは関係ないように思われたが、量子力学は複素数なしにはありえない、行列も初期には考えられなかった使い方がされている。ハミルトンの四元数も初期には注目されたが、やがて忘れ去られたが、素粒子論で見直され、8 元数は最先端素粒子論で使われているし、リー群との関連も議論されている。自然科学に使われることなど念頭に置かず発展してきた抽象数学がどんどん自然科学に取り入れられてくるというのはどういうことかは断定できる人はいないであろうが、数学研究者も自然の中に生きているのだから、脳の思考体系も無意識に自然を記述するのに適した方向にいくのであろうか。アインシュタインも一般相対論では非ユークリッド幾何学を取り込んで理論展開するには、数学者の力がひつようであったし、ハイゼンベルグは行列力学を導くのに行列を知らなかったし、ディラックも物理的直観には天才的なところがあったが、使った数学は厳密さに欠けていて、のちの数学者が厳密な理論づけをした。例えばδ関数などはまさに直観的なものであり、それは超関数として厳密に定義された。それにより新しい分野の数学が発展したという意味では、物理的直観が数学に先行した例である。現在統一理論で最先端を走っているウィッテンはフィールズ賞をとった数学者であるが、超ひも理論の発展の牽引をしている。現在は物理学者が数学を利用して研究するというイメージではなく、純粋数学に深い洞察力を持った者が物理を研究するという様相を呈していて、物理と数学が複雑に入り組んだ状況を理解できないと先に進めない世界である。今まで何回もでてきたゲージ変換も現実の世界とは関係ない抽象空間の理論であるが、ゲージ場を考えない力というものが存在しえないのである。そういう抽象的な理論からでてくるヒッグス粒子とかグラビトン(重力子)を実験物理学者は探しているのである。

参考文献

(1) van der Waerden (1983) 「Geometry and Algebra in Ancient Civilizations 」p150 Springer-Verlag

(2) 加藤 文元 (2009)「物語 数学の歴史」8 章 中公新書

(3) Ian Stewart (2007) 「Why Beauty Is Truth: : The Story of Symmetry」Chap 7 Basic Books, Inc

(4) ランダウ-リフシッツ (1986) 「力学」第 1 章, 2 章 東京図書

(5) 広瀬立成 (2006) 「対称性から見た 物質・素粒子□宇宙」第 5 章 講談社